Et matematikforløb med robotter

Niels Erik Wegge, Birkerød Gymnasium

Robotter på skemaet

På Birkerød Gymnasium har vi gennem en årrække udviklet og implementeret lejlighedsvis brug af robotter i undervisningen. Robotterne har vist sig at give en frisk og motiverende vinkel på dele af standardpensummet i både matematik, fysik og naturvidenskabeligt grundforløb, og her senest har også vores engelskfaggruppe kastet sig over robotterne. Vi har været glade for at kunne sætte robotter på skemaet og derigennem introducere eleverne til programmering og algoritmisk tænkning, samtidig med at vi har kunnet holde et stærkt fokus på det faglige kernepensum, som alligevel skulle gennemgås.

De fleste af vores undervisningsforløb er baseret på robotten *Fable* fra Shape Robotics, og en del af disse er beskrevet i otte tidligere artikler her i LMFK–bladet (2020 nr. 1, 2021 nr. 1+3+4, 2022 nr. 2). Fable–robotterne er robuste og nemme at arbejde med, og de fungerer fint i talrige faglige sammenhænge. I fysik på Birkerød Gymnasium er det for eksempel blevet helt standard at bruge en robot til at trække en friktionsblok med konstant fart (i stedet for at gøre det med hånden), at etablere en konstant accelereret bevægelse (uden brug af tyngdekraften), og at hjælpe til i undersøgelsen af dopplereffekt eller af luftmodstand. Vi bruger også robotterne når vi undersøger energiomsætningen i elektromotorer (Fable hejser forskellige lodder op med konstant fart), når vi vil illustrere årsagen til brydning af lys (robothjulet skifter fart, når det kører ind i et "langsommere" medie), eller når vi vil håndgribeliggøre den tilsyneladende retrograde bevægelse af planeter i solsystemet (to robotter repræsenterende Jorden og Mars programmeres til at køre i jævn koncentrisk cirkelbevægelse med hver deres radius og fart). Endelig er opmålingen af sammenhængen mellem robottens faktiske fart og det "fart–tal", den programmeres med, en helt simpel men god kalibreringsopgave med lineære sammenhænge på naturvidenskabeligt grundforløb.

Figur 1
Dobot Magician Lite – en stationær miniature industrirobot med præcis motorstyring. Robotten ses her monteret med hhv. gribeklo og sugekop.

I matematik har vi også en lang række undervisningsforløb, hvor forståelse af fx lineære og trigonometriske funktioner samt færdigheder i at opstille og løse ligningssystemer er nødvendige for at få robotten til at gøre det, vi vil have den til at gøre.

Nogle gange er vi dog blevet begrænset af robottens manglende præcision, når den kører og drejer. En oplagt opgave som beskrevet i Boks 1 kan simpelthen ikke eksekveres præcist nok af Fable: slør i hjulene gør, at robotten ikke ender hvor den starter. Derfor var vi glade, da vi opdagede den lille industrirobot *Dobot Magician Lite* (Fig. 1). Den kan ganske vist ikke køre, men dens servomotorer er meget præcise, og robotten kan således bruges i matematikopgaver, der kræver præcision for at lykkes (se Boks 2).

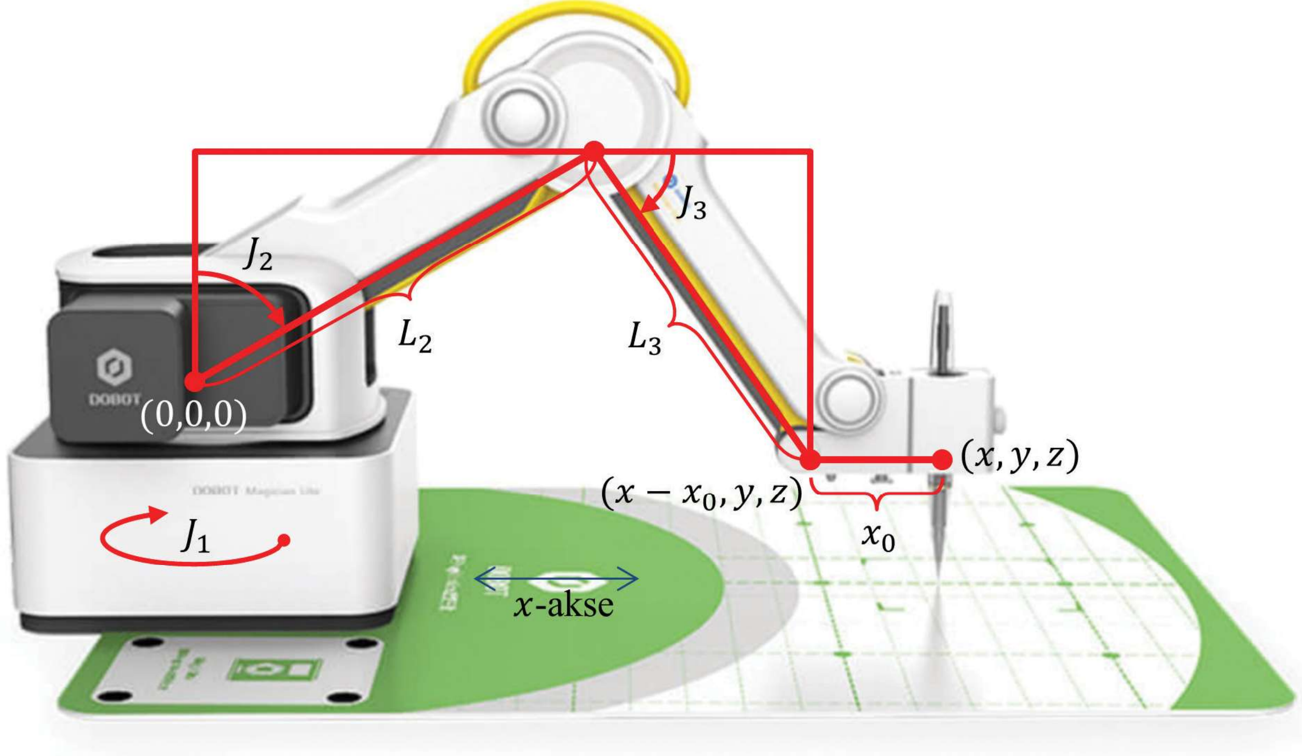
Formålet med denne artikel er at præsentere et indledende undervisningsforløb med Dobotten; et forløb, hvor eleverne lærer at manøvrere robotten samtidigt med at der sættes fokus på den matematik, der ligger bag robottens bevægelser. Tak til *Patrick Liljegren Gregersen* for hans programmeringskompetence og gode didaktiske ideer!

Boks 1
Ud og hjem igen
– retvinklede trekanter med robotter

- Programmér robotten til at køre 40 cm, dreje 90 grader og køre yderligere 30 cm.
- Beregn hvilken vinkel og hvilken afstand robotten nu skal dreje og køre for at komme tilbage til start – og se om det virker! (Det gør det kun hvis man både har regnet rigtigt og robottens motorer er meget præcise.)

Boks 2
Snup karamellen…

- Hæng en lille karamel op i en snor i et stativ.
- Brug en lineal til at måle karamellens position i (x, y, z)–koordinater.
- Beregn de vinkler Dobottens arme skal indstilles i for at komme hen til karamellen.
- Prøv om det virker!



Figur 2
Dobot–armens to led har længde L_2 og L_3, og deres vinkelindstillinger er givet ved "joint"–vinklerne J_2 og J_3. Hele robothuset roteres med vinklen J_1. De kartesiske koordinater (x, y, z) i forhold til robottens centrum (0, 0, 0) kan beregnes ud fra J_1, J_2, J_3, L_2, L_3 og x_0. Det bliver meget mere overkommeligt, hvis man holder sig til den lodrette plan y = 0 svarende til J_1 = 0.

Dobot Magician Lite i matematik

Dobotten er en stationær pick–and–place robot i miniatureformat. Den arbejder med høj præcision (højere end Fable–systemet) og bruges faktisk til industrielle processer, fx i medicinalindustrien og til andet laboratoriearbejde. Typiske arbejdsopgaver er at løfte eller gribe objekter og føre dem fra et sted hen til et andet. Dobotten kan også tegne og skrive, men har altså ikke hjul som Fable–robotterne.

Dobotten styres af fire motorer: en som giver rotation omkring en lodret akse, to til at variere vinklerne for robotarmens to led, samt en til rotation af det gribe-redskab, som eventuelt er spændt på for enden af robotarmen. I vores indledende undervisningsforløb sidder der en lodret tusch for enden af armen (Fig. 3), men senere kunne man montere en sugekop eller en gribeklo til manipulere små objekter (Fig. 1).

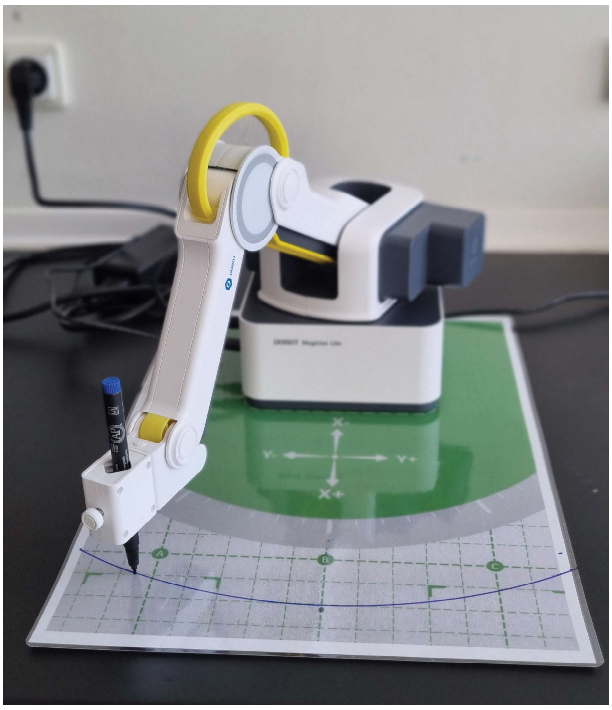
Nærværende undervisningsforløb udsprang af en undren. Programmeringen af Dobotten foregår primært gennem bekvemme "black box"–kommandoer af typen "flyt robotarmen fra A til B" – men hvordan i al verden bærer robotten sig ad med at få sin arm til at bevæge sig i en lige linje fra A til B, fx lodret op–ned? Den har jo kun har mulighed for at justere på armens to vinkler. Hvilke kontinuert udførte vinkelberegninger må robotten være programmeret til at foretage undervejs i bevægelsen for at opnå den rette linje?

Svaret er naturligvis simpelt: armens placering definerer hele tiden to retvinklede trekanter med konstante hypotenuser (Fig. 2), og sammenhængen mellem koordinaterne til punktet for enden af robotarmen og robotarmens to vinkler findes let ved hjælp af et par trigonometriske beregninger. Hvis bevægelsen går på skrå gennem (*x*, *y*, *z*)–rummet, skal robotten også dreje sig undervejs, men dette problem er principielt set ikke meget mere kompliceret end når den lineære bevægelse er begrænset til to dimensioner. Alligevel – vi tænkte, at her var noget virkelig solid gymnasiematematik; noget som måske kunne motivere eleverne, når de skal lære om koordinatsystemer og trigonometri.

Vores undervisningsforløb falder i fire dele. Python–programmeringen (simpel blok–programmering) indføres undervejs, men fokus er hele tiden på det matematikfaglige. De tre første dele foregår i elevgrupper, som har hver deres robot (kan afvikles i et enkelt 90 minutters modul), mens sidste del er en ren matematik–opfølgning.

Del 1
Dobottens arbejdsområde og matematiske funktioners definitionsmængder

- Kvalitativ forståelse for og taktil oplevelse af kartesiske koordinater i tre dimensioner. I hvilke retninger måler robotten hhv. *x*, *y* og *z*? Hvorhenne er værdierne hhv. positive og negative?
- Oplevelse af at det er begrænset hvor langt ud, op og ned robotarmen kan række og – ikke mindst – at det mulige interval for en af de kartesiske koordinater *x*, *y* og *z* ikke er fast, men afhænger af den øjeblikkelige værdi af de to andre variable. Det skyldes helt enkelt robottens mekaniske konstruktion.
- Analogi til funktioners definitionsmængder. Hvad er for eksempel definitionsmængden for funktionerne $f_1(x)=\sqrt{100-x^2}$ og $f_2(x)=\sqrt{x^2-100}$? Og hvad sker der, når der er flere variable, som i $f_3(x,y)=\sqrt{xy}$?



Figur 3
Dobotten tegner en cirkelbue på det laminerede underlag. Vi er på vej til at finde centrum for robottens koordinatsystem.

Del 2
Dobottens koordinatsystemer

- Det kartesiske koordinatsystem kvantitativt betragtet: Send robotarmen hen til et givet punkt, fx $(x, y, z) = (200, -200, 0)$. Hvis tallene er afstande i millimeter, hvor mon så punktet (200, 200, 0) ligger? Peg på punktet og check med robotten.
- Opgaven ovenfor kan løses uden at kende placeringen af origo. Men hvor ligger (0, 0, 0)? Det viser sig umuligt at føre robotarmen hen til (0, 0, 0), for punktet ligger et sted inde i robottens krop. Da det er rimeligt at antage, at robottens lodrette drejeakse går gennem $(x, y) = (0, 0)$, får vi i stedet robotten til at tegne en cirkelbue med centrum (0, 0) ved at køre med rotationsvinklen mens armens to vinkler holdes konstante (Fig. 3). Det bliver kun til en lille del af cirklen, men dens centrum kan efterfølgende findes som skæringspunktet for to diametre, som hver især konstrueres som halveringslinjer for en sekant. Det kan gøres enten ved simpel opmåling eller ved græsk passer–og–lineal konstruktion. Se Fig. 4 og 5. Vi fandt robottens centrum og lærte samtidigt noget om cirkler!
- Kontrollér at det passer: Vælg et eller andet punkt i (x, y)–planen og brug en lineal til at opmåle dets koordinater ud fra det netop fundne origo – går robotarmen det rigtige sted hen, når koordinaterne indtastes?

Del 3
Dobotten tegner firkanter og trekanter – og andre geometriske figurer

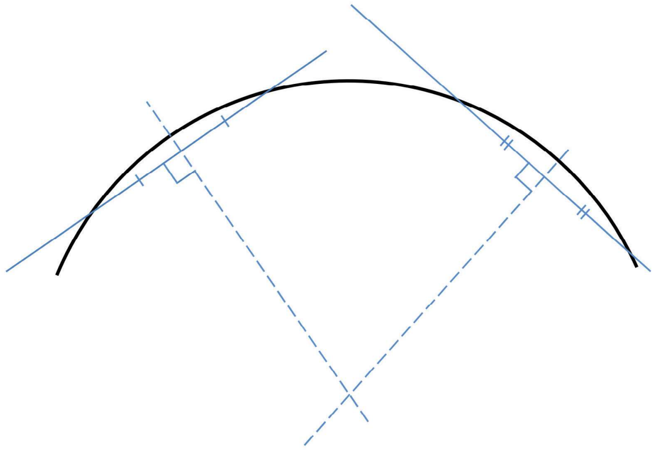
- Brug robottens "black box"–kommandoer til at tegne rette linjer mellem fire punkter, så der fremkommer et rektangel med foreskrevne sidelængder. Her skal man altså tænke over hvad koordinaterne for rektanglets hjørner skal være for at få de ønskede sidelængder.
- Med lidt udvidet programmering (Fig. 7) kan man få Dobotten til at tegne en ligesidet trekant med foreskreven sidelængde efter den selv har regnet ud hvor de tre punkter skal placeres. Hertil kræves forståelse for formlen $h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ for højden i en ligesidet trekant med sidelængde s. Det er en simpel Pythagoras–opgave med lidt ekstra algebra (Fig. 6). Som bonus fås en håndgribelig forståelse for formlen $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Fri leg: tegn andre geometriske figurer. Overvej fx hvor umådeligt svært det må være at få Dobotten til at tegne en cirkel med givet centrum og radius.

Del 4
Matematikopfølgning med perspektivering af robotarbejdet

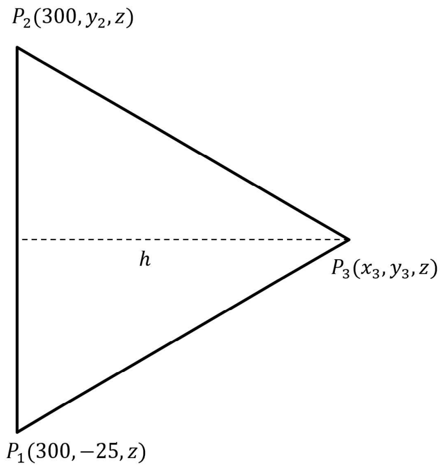
- Træning i at bestemme funktioners definitions– og værdimængder.
- Cirklers geometriske egenskaber, herunder "passer–lineal" konstruktion af diametre i cirkler.
- Sinus og cosinus til standardvinklerne 60°, 45°, 30°.
- Beregninger i ligesidede og andre trekanter, punkters koordinater.
- Omregning mellem et punkts kartesiske koordinater og Dobottens vinkler – udregningerne kvalitetssikres i plenum med karamelaktiviteten i Box 2.
- Evt. perspektivering: konstruktion/tegning af regulære n–polygoner og (i grænsen $n \to \infty$) cirkler. Herunder kunne man sagtens komme ind på vektorer og drejningsmatricer.

Undervisningsforløbet kan tilsendes pr. mail til interesserede læsere. På Birkerød Gymnasium vil vi også meget gerne høre andres roboterfaringer og –overvejelser. Skriv til artiklens forfatter på nw@birke-gym.dk.

Figur 4
Simpel konstruktion af den første af to diametre i den cirkel, robotten har tegnet en del af.



Figur 5
Sekanternes midtnormaler er diagonaler som skærer hinanden i cirklens centrum.



Figur 6
Dobotten skal tegne en ligesidet trekant startende i P_1 med koordinaterne $(x, y, z) = (300, -25, z)$. Når sidelængden af trekanten er 50, hvor stor er så højden h, og hvilke værdier har koordinaterne y_2, x_3 og y_3? Alle tal er i mm.

Figur 7
Blokprogram til tegning af ligesidet trekant med sidelængden size = 50 mm. Programmet starter med at beregne trekantens højde $height = \sqrt{3}/2 \cdot size$. Man har i forvejen manuelt placeret robotarmen, så tuschen lige præcis rører papiret – herved lærer robotten hvad z–koordinaten skal være når der tegnes. Så tegner robotten rette linjer fra startpunktet $P_1(x_1, y_1, z_1) = (300, -25, z)$ til $P_2(x_2, y_2, z_2) = (x_1, y_1 + size, z)$ og videre til $P_3(x_3, y_3, z_3) = (x_2 + height, y_2 - {}^1\!/_2 size, z)$. Til sidst tilbage til P_1.